Funkcinės lygtys. Martynas Zaveckas 2023 11 20

Analizuojami pavyzdžiai iš:

https://www4352.vu.lt/matematikos-olimpiados/wp-content/uploads/2015/10/matknyga.pdf

1 Pavyzdys. *Raskite visas funkcijas* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tenkinančias lygtį*

$$f(x+y) = f(x)$$

su visais realiaisiais x *ir* y, *bei lygybę* $f(0) = 0$.

Šios funkcinės lygties sąlyga susideda iš keturių dalių. Apžvelkime jas:

- Ieškomų funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritys. Šiuo atveju duota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, t.y. sprendinių reikia ieškoti tarp visų funkcijų apibrėžtų realiuosiuose skaičiuose ir su realiomis reikšmėmis.
- Lygtis, kurią turi tenkinti ieškomos funkcijos.
- Lygtyje dalyvaujančių kintamųjų kitimo sritys. Šiuo atveju duota, kad lygtį funkcijos turi tenkinti su visomis realiomis x ir y reikšmėmis
- Papildomos sąlygos. Šiuo atveju duota, kad reikia ieškoti tik tų lygties sprendinių, kurie papildomai tenkina $f(0) = 0$.

$x=0 \quad f(y)=f(0)=0$

Tikr. $\quad 0=0 \quad$ Ats. $f(y)=0$

2 Pavyzdys. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios tenkina lygtį*

$$f(x+y) = f(x^2+y^2)$$

$x=0 \quad y=0 \Rightarrow f(0)=f(0)$

$x=1 \quad y=0 \Rightarrow f(1)=f(1)$

$x=y \quad \Rightarrow \quad f(2x)=f(2x^2)$

$x=-y \quad \Rightarrow \quad f(0)=f(2x^2)=f(2x) \Rightarrow f(2x)=f(0)=C$

$f(x)=C$

Tikr. $\quad C=C$

Ats. $f(x)=C$

3 Pavyzdys. [LitKo 2008] *Raskite visas tokias realiąsias funkcijas f, kad $f(x)f(y) - f(xy) = x+y$ su visomis realiųjų skaičių x ir y poromis.*

$x=0, y=0 \quad f(0)\cdot f(0) - f(0) = 0$

$f^2(0) - f(0) = 0$

$f(0)(f(0)-1) = 0$

$f(0)=0$ arba $f(0)=1$

$x=0,\ f(0)=0$

$f(0)\cdot f(y) - f(0) = y$

$0-0=y$

$y=0$ net.

$x=0,\ f(0)=1$

$f(0)\cdot f(y) - f(0) = y$

$f(y)-1=y$

$f(y)=y+1$

$f(x)=x+1$

$f(xy)=xy+1$

Tikr: $(x+1)(y+1)-(xy+1)=x+y$

$\cancel{xy}+x+y+\cancel{1}-\cancel{xy}-\cancel{1}=x+y$

$x+y=x+y$

Ats. $f(y)=y+1$

4 Pavyzdys. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$* [1] *tenkinančias lygybę*

$$f(2u) = f(u+v)f(v-u) + f(u-v)f(-u-v)$$

$u=0, v=0 \Rightarrow f(0) = f^2(0) + f^2(0)$

$f(0) = 2f^2(0)$

$2f^2(0) - f(0) = 0$

$f(0)(2f(0) - 1) = 0$

$f(0) = 0$ arba $f(0) = \frac{1}{2}$

$u=0,\ f(0)=0 \Rightarrow f(0) = f(v)\cdot f(v) + f(-v)\cdot f(-v)$

$0 = f^2(v) + f^2(-v)$

$u=0\ \ f(0) = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} = f^2(v) + f^2(-v)$

$u=v \Rightarrow f(2u) = f(2u)\cdot f(0) + f(0)\cdot f(-2u)$

$u=v,\ f(0)=0 \Rightarrow \boxed{f(2u) = 0}$

$u=v,\ f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(2u) = \frac{1}{2} f(2u) + \frac{1}{2} f(-2u)$

$\frac{1}{2} f(2u) = \frac{1}{2} f(-2u)$

$f(2u) = f(-2u)$

$0 = f^2(u) + f^2(-u) \qquad \frac{1}{2} = f^2(u) + f^2(-u)$

$0 = 2f^2(u) \qquad \frac{1}{2} = 2f^2(u)$

$f(u) = 0 \qquad f(u) = \frac{1}{2}$, kai $f(u) \geq 0$

Tikr.: $0 = 0\cdot 0 + 0\cdot 0$ arba $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$0 = 0$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Ats.: $f(u) = 0$ ir $f(u) = \frac{1}{2}$

Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina

$$f(x+y) + f(x-y) = 2x^2 + 2y^2.$$

$y=0$ $\quad f(x)+f(x)=2x^2$

$f(x)=x^2$

Tikr.: $(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2$

$2x^2+2y^2=2x^2+2y^2$

Ats. $f(x)=x^2$

Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina

$$f(x) + f(x+y) = y+2.$$

$y=0$ $\quad f(x)+f(x)=2$

$f(x)=1$

Tikr.: $1+1=y+2$

$y=0$ $\qquad$ Ats.: sprendinių nėra.

Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina

$$f(x) = (x-y)f((x-y+1)x) + f(y).$$

$x=0 \Rightarrow f(0)=-y\cdot f(0)+f(y)$

$f(y)=y\cdot f(0)+f(0)$

$f(y)=f(0)(y+1) \qquad f(0)=c$

$f(y)=c(y+1)$

Tikr.: $c(x+1)=(x-y)c((x-y+1)x+1)+c(y+1)$

$c(x+1)=(x-y)c(x^2-xy+x+1)+c(y+1)$

$c((x-y)(x^2-xy+x+1)+(y+1)-(x+1))=0$

$c(x-y)(x^2-xy+x+1)+(y-x)=0$

$c(x-y)(x^2-xy+x+2)=0$

$c=0 \qquad x=y \qquad y=\dfrac{x^2+x+2}{x}$

$\qquad$ net. $\qquad\qquad$ net.

Ats. $f(x)=0$

Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x ir y tenkina

$$yf(x) = xf(y).$$

$y=1 \Rightarrow f(x) = x f(1) \qquad f(1) = c$

$f(x) = cx$

Tikr.: $\quad ycx = xcy \qquad c \in R$

Ats.: $f(x) = cx, \; c \in R$

Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x ir y tenkinančias lygtį

$$f(x + f(y)) = f(x) + yf(x).$$

$y=-1 \quad f(x + f(-1)) = f(x) - f(x)$

$f(x + f(-1)) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Tikr.: $\quad 0 = 0 + y \cdot 0$

$0 = 0 \qquad$ Ats. $f(x) = 0$

Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais $x \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį

$$xf(x) + f(-x) + 1 = 0. \qquad f(-x) = -xf(x) - 1$$

$x = -x \qquad -x f(-x) + f(x) + 1 = 0$

$-x(-x f(x) - 1) + f(x) + 1 = 0$

$x^2 f(x) + x + f(x) + 1 = 0$

$f(x)(x^2+1) = -x - 1$

$f(x) = -\dfrac{x+1}{x^2+1}$

Tikr.: $\quad \dfrac{-x(x+1)}{x^2+1} + \dfrac{-(-x+1)}{x^2+1} + 1 = 0$

$\dfrac{-x^2 - x + x - 1 + x^2 + 1}{x^2+1} = 0$

$\dfrac{0}{x^2+1} = 0$

$0 = 0 \qquad$ Ats.: $f(x) = -\dfrac{x+1}{x^2+1}$

[LitMo 2000, Pan African 2003] Raskite funkcijas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ su visomis realiosiomis x,y reikšmėmis tenkinančias lygtį

$$(x+y)(f(x)-f(y)) = f(x^2)-f(y^2).$$

$y=0 \quad x(f(x)-f(0)) = f(x^2)-f(0)$

$y=1 \quad (x+1)(f(x)-f(1)) = f(x^2)-f(1)$

$$\begin{cases} \text{I} & x f(x) - x f(0) = f(x^2) - f(0) \\ \text{II} & x f(x) - x f(1) + f(x) - \cancel{f(1)} = f(x^2) - \cancel{f(1)} \end{cases}$$

$\text{I}-\text{II} \quad x f(1) - x f(0) - f(x) + f(0) = 0$

$f(x) = x f(1) - x f(0) + f(0) = 0$

$f(x) = x(f(1)-f(0)) + f(0)$

$f(x) = ax + b$

Tikr.: $(x+y)(ax+b-ay-b) = ax^2+b-ay^2-b$

$(x+y)(ax-ay) = ax^2-ay^2$

$a(x+y)(x-y) = a(x+y)(x-y)$

$a \in R$

Ats.: $f(x) = ax+b$, kai $a, b \in R$.